Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

<u>Ricordo:</u>

Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

Fisso una decomposizione $D = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ dell'intervallo $[a,b]$

con $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

$$s_D^f = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \, (x_{i+1} - x_i)$$

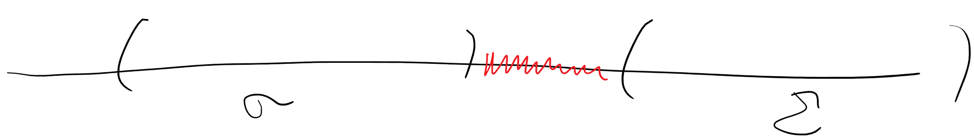
$$S_D^f = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \, (x_{i+1} - x_i)$$

Se $\sigma = \{ s_D^f : D \text{ decomp di } [a,b] \} \subseteq \mathbb{R}$

$$\Sigma = \{ S_D^f : D \text{ dec. di } [a,b] \} \subseteq \mathbb{R}$$

Lemma (Riemann)

$$\sigma \leq \Sigma$$



Def Se $\boxed{\sup \sigma = \inf \Sigma = c \in \mathbb{R}}$

diremo che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

è Riemann integrabile

e definiamo $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = c}$

Per il calcolo dell'integrale di Riemann, è necessaria la definizione?

<u>Criterio</u> (di Riemann integrabilità)

Condizione necessaria e sufficiente affinché

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

è Riemann integrabile è che

$$\boxed{(R) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists D_\varepsilon \text{ dec. di } [a,b] : \quad S_{D_\varepsilon}^{f} - s_{D_\varepsilon}^{f} < \varepsilon}$$

Vediamo ora come due classi di funzioni sono automaticamente Riemann integrabili.

<u>Teorema 1</u>

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua

$\Longrightarrow$ f è Riemann integrabile

<u>Teorema 2</u>

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e <u>monotona</u>

$\Longrightarrow$ f è Riemann integrabile

<u>Dim</u> caso $f(x)$ crescente

(ossia $x \le y \iff f(x) \le f(y)$)

Osserviamo che se $f : [y,z] \to \mathbb{R}$ <u>cresce</u>

$$\Rightarrow \boxed{\inf_{[y,z]} f = f(y) \quad , \quad \sup_{[y,z]} f = f(z)}$$

Provo che $f(x)$ è Riemann integrabile verificando

(R) condizione di Riemann integrabilità.

Ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D_\varepsilon \text{ dec. di } [a,b] : S_{D_\varepsilon}^f - s_{D_\varepsilon}^f < \varepsilon$$

dobbiamo scegliere

<u>Osserva</u> : Se $f(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$ (f costante)

$$\Rightarrow \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = c = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\Rightarrow \forall D \text{ dec. di } [a,b] \quad S_D^f - s_D^f = 0$$

(banalmente verifico (R))

Posso assumere che $f(x)$ non è costante

$$\Longrightarrow \quad f(a) < f(b)$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo una qualunque decompos. di $[a,b]$ $D_\varepsilon = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ tale che

$$\boxed{x_{i+1} - x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}}$$

Proviamo che vale (R). Infatti

$$S_{D_\varepsilon}^f - s_{D_\varepsilon}^f = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \, (x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \, (x_{i+1} - x_i)$$

(oss. iniziale)

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] (x_{i+1} - x_i)$$

(scelta di D_ε)

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \Big[\big(\cancel{f(x_1)} - f(a)\big) + \big(\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}\big) + \cancel{\dots}$$

$$\dots + \big(\cancel{f(x_{n-1})} + f(x_{n-2})\big) + \big(f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})}\big) \Big]$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{f(b)-f(a)}} \left[\cancel{-f(a)+f(b)} \right] = \varepsilon$$

Ossia

$$S^{f}_{D_\varepsilon} - s^{f}_{D_\varepsilon} < \varepsilon$$

<u>Def</u> (Integrale definito)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata Riemann integrabile

Se $y, z \in [a,b]$ (non so chi è più grande!)

definiamo l'integrale definito tra y e z come

$$\int_y^z f(x)\,dx = \begin{cases} \int_y^z f(x)\,dx \text{ (int. di Riemann)} & \text{se } y<z \\ -\int_z^y f(x)\,dx & \text{se } y>z \end{cases}$$

Funzione integrale

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e Riemann integrabile

e sia $x_0 \in [a,b]$

Definiamo una nuova funzione, detta <u>funz. integrale</u>

$\forall x \in [a,b]$

$$\boxed{F(x) \stackrel{def}{=} \int^x f(t)\,dt}$$

$\forall x \in (a,b)$ $$\boxed{F(x) \overset{def}{=} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

Teorema (Torelli)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua

$\Longrightarrow$ $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è sempre primitiva di f

ossia: F è derivabile + $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in]a,b[$

Corollario Ogni funzione continua ammette primitive

Teorema (Fondamentale calcolo integrale)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e sia

$G : [a,b] \to \mathbb{R}$ una qualunque primitiva di $f(x)$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$$

Ultima cosa:

Teorema (Media integrale)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e Riemann integrabile

Allora

$$\inf_{[a,b]} f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq \sup_{[a,b]} f(x) .$$

<u>Dim</u> Sappiamo già

$$s_D^f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S_D^f$$

$\forall D$ dec. di $[a,b]$

Considero come decomposizione

$$D = \{a, b\}$$

$$s_D^f = \inf_{[a,b]} f(x)\,(b-a) \qquad S_D^f = \sup_{[a,b]} f(x)\,(b-a)$$

Da sopra ottengo

$$\inf_{[a,b]} f(x)\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f(x)\,(b-a)$$

dividendo per $(b-a)$ ottengo il teorema media integrale ■

Dal teorema di Darboux + Teorema media integrale, possiamo concludere

<u>Corollario</u>

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$$\Longrightarrow \exists\, c \in [a,b] :$$

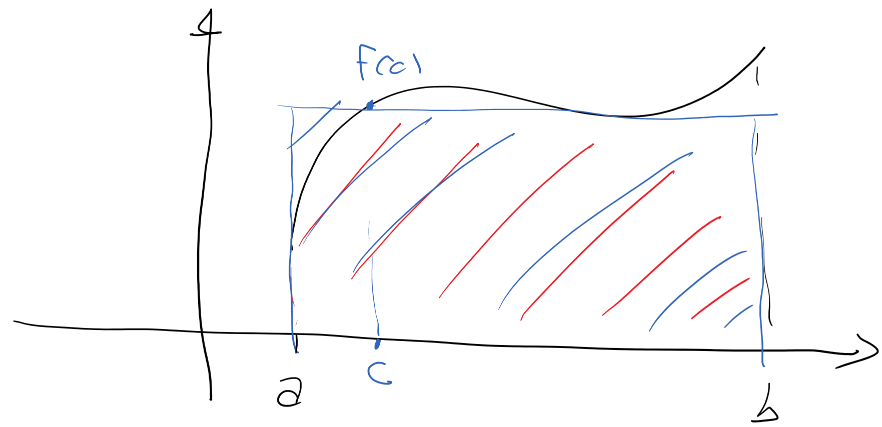
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

ossia $\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$

ossia $$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

tale corollario ci dice che l'area sottesa al grafico di f(x) si può sempre pensare come l'area di un rettangolo!

Graficamente



Esercizio

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+2)^2}\,dx$$

Passo 2 (x^2+2) è irriducibile

Passo 3 Ricerca costanti

$$\boxed{\frac{1}{x^2(x^2+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}}$$

$$= \frac{Ax(x^2+2)^2 + B(x^2+2)^2 + (Cx+D)\,x^2(x^2+2) + }{x^2(x^2+2)^2}$$

$$x^2 (x^2+2)^2$$

$$+ (Ex+F)\, x^2$$

$$= \frac{Ax(x^4+4x^2+4) + B(x^4+4x^2+4) + (Cx^5+2Cx^3+Dx^4+2Dx^2) + Ex^3+Fx^2}{x^2(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{Ax^5+4Ax^3+4Ax+Bx^4+4Bx^2+4B+Cx^5+Dx^4+2Cx^3+2Dx^2+Ex^3+Fx^2}{x^2(x^2+2)^2}$$

metto a sistema questo numeratore con 1 (num. 1° membro)

$$A+C = 0$$
$$B+D = 0$$
$$4A+2C+E = 0$$
$$4B+2D+F = 0$$
$$4A = 0$$

$$4B = 1$$

$$A = 0$$
$$B = \frac{1}{4}$$
$$C = 0$$
$$D = -\frac{1}{4}$$
$$E = 0$$
$$1 - \frac{1}{2} + F = 0$$
$$F = -\frac{1}{2}$$

Passo 4 Sostituisco :

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

A parte :

$$\int \frac{1}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{}$$

$$\int \frac{1}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx = (*)$$

$$\left(z = \frac{x}{\sqrt{2}} \rightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{2}}dx\right)$$

$$(*) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \underset{=}{\overset{1^\circ \text{sost}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z^2+1}\Bigg]_{z=\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]^2} \overset{1^\circ \text{sost}}{=}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x^2}{2}+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$$

Esercizio $\displaystyle\int \sqrt{\frac{4+e^x}{1-e^x}}\,dx = (*)$

Uso II° sost. $F(t) = \lg t \iff t = e^x$

$$(*) \int \sqrt{\frac{4+t}{1-t}}\cdot\frac{1}{t}dt \Bigg]$$

$$(*)\quad \int \underbrace{\sqrt{\frac{4+t}{1-t}}}_{g(f(t))} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{f'(t)}\, dt \Bigg]_{t=e^x}$$

Uso II° sost $\qquad z = \sqrt{\dfrac{4+t}{1-t}}$

$$z^2 = \frac{4+t}{1-t}$$

$$z^2(1-t) = 4+t$$

$$z^2 - z^2 \cdot t - t = 4$$

$$t(-z^2-1) = 4 - z^2$$

$$\boxed{t = \frac{z^2-4}{z^2+1}}$$

$$dt = \frac{2z\,(\cancel{z^2}+1) - (\cancel{z^2}-4)\,2z}{(z^2+1)^2}\, dz$$

$$= \frac{10\,z}{(z^2+1)^2}\, dz$$

Da cui

$$\int \sqrt{\frac{4+t}{1-t}} \cdot \frac{1}{t}\, dt \Bigg]_{t=e^x} \overset{2^\circ \text{ sost}}{=}$$

$$= \int z \cdot \frac{1}{\frac{z^2-4}{\cancel{z^2+1}}} \cdot \frac{10z}{(z^2+1)^{\cancel{2}}}\, dz \Bigg]_{z=\sqrt{\frac{4+t}{1-t}} = \sqrt{\frac{4+e^x}{1-e^x}}}$$

$$10 \int \frac{z^2}{\qquad\qquad} dz$$

$$= 10 \int \frac{z^2}{(z-2)(z+2)(z^2+2)} \, dz$$

Passo 3 Ricerca cost.

$$\boxed{\frac{z^2}{(z-2)(z+2)(z^2+2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2} + \frac{Cz+D}{z^2+2}}$$

$$= \frac{A(z+2)(z^2+2) + B(z-2)(z^2+2) + (Cz+D)(z^2-4)}{(z-2)(z+2)(z^2+2)}$$

$$= \frac{Az^3 + 2Az^2 + 2Az + 4A + Bz^3 - 2Bz^2 + 2Bz - 4B + Cz^3 + Dz^2 - 4Cz - 4D}{(z-2)(z+2)(z^2+2)}$$

$$= \frac{(A+B+C)z^3 + (2A-2B+D)z^2 + (2A+2B-4C)z + (4A-4B-4D)}{(z-2)(z+2)(z^2+2)}$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \rightarrow C = -A-B \\ 2A-2B+D = 1 \\ 2A+2B-4C = 0 \rightarrow 2(A+B) + 4(A+B) = 0 \\ 4A-4B-4D = 0 \end{cases}$$

$C = -A+A = 0$

$\Rightarrow A+B = 0$

$\Rightarrow B = -A$

2° $\quad 2A - 2(-A) + D = 1 \Rightarrow 4A + D = 1 \Rightarrow D = 1-4A$

4° $\quad 4A - 4(-A) - 4(1-4A) = 0$

$$8A - 4 + 16A = 0 \Rightarrow 24A = 4$$

$$8A - 4 + 16A = 0 \Rightarrow 24A = 4$$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

Da cui

$A = \frac{1}{6}$

$B = -\frac{1}{6}$

$C = 0$

$D = \frac{1}{3}$

$$D = 1 - 4A = 1 - 4 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Passo 4 Sostituzione costanti

$$\int \frac{z^2}{(z-2)(z+2)(z^2+2)} dz = \frac{1}{6}\int \frac{1}{z-2} - \frac{1}{6}\int \frac{1}{z+2} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{z^2+2}$$

$$= \frac{1}{6} \lg|z-2| - \frac{1}{6} \lg|z+2| + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$\left(z = \sqrt{\frac{4+e^x}{1-e^x}}\right)$

$$= \frac{1}{6} \lg\left|\sqrt{\frac{4+e^x}{1-e^x}} - 2\right| - \frac{1}{6} \lg\left|\sqrt{\frac{4+e^x}{1-e^x}} + 2\right| +$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4+e^x}{1-e^x}}\right) + C$$

Esercizio

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = (a_n)^2 \end{cases}$$

$F(x) = x^2$

$\boxed{a_{n+1} = f(a_n)}$

Osserva $a_1 > 0$ $a_{n+1} = (a_n)^2 > 0$

Studio $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$F'(x) = 2x > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow F(x) \text{ cresce in }]0, +\infty[$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 < a_1$$

$$F(a_2) < F(a_1) \iff a_3 < a_2$$

$$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è decrescente}$$

Inoltre $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (lim. inferiormente)

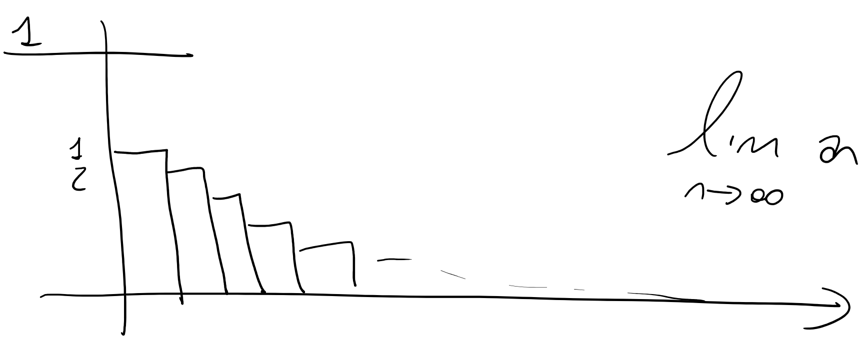
$$\Rightarrow \lim a_n = \ell = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$$

è un numero

F(x) è cont. $\Rightarrow \quad \ell = F(\ell) = \ell^2$

$$\iff \ell^2 - \ell = 0$$

$$\ell(\ell - 1) = 0 \quad \begin{cases} \ell = 0 \\ \cancel{\ell = 1} \end{cases}$$



$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Esercizio

$$|\ a_1 = 3$$

Esercizio

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2(a_n - 1) \end{cases}$$

$f(x) = 2(x-1)$ $\qquad$ $f'(x) = 2 > 0$

F cresce $\qquad$ $a_1 = 3$ $\qquad$ $a_2 = 2(3-1) = 4$

$a_1 < a_2 \Rightarrow a_2 < a_3 \Rightarrow a_3 < a_4 \ldots$

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n}$ crescente

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \begin{cases} \nearrow +\infty \\ \searrow \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Studio $\qquad l = f(l) = 2(l-1)$

$$2l - 2 - l = 0 \qquad l = 2$$

Ma $\quad a_1 = 3 \not< 2$ $\qquad$ Deduco che $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$